

正交压缩采样系统时域分析

陈胜焱¹, 席 峰¹, 张素玲², 刘 中¹

(1. 南京理工大学电子工程与光电技术学院, 江苏南京 210094; 2. 南京晓庄学院电子工程学院, 江苏南京 211171)

摘要: 正交压缩采样(Quadrature Compressive Sampling, QuadCS),可直接低速获取射频信号的同相和正交支路信号,是一种有效的宽带/超宽带信号采样模信转换系统. 本文在分析QuadCS感知矩阵时域特性的基础上,有效地将感知矩阵分解成QuadCS不同组成单元描述矩阵乘积的形式,并籍此采用单位范数紧框架理论建立了QuadCS的可重构性. 此外,本文还分析了QuadCS输出信噪比和重构信噪比,证明了QuadCS保持输入信噪比的不变性,推导出了重构信噪比损失关系式. 本文的工作进一步完善了正交压缩采样理论.

关键词: 压缩感知;模信转换;正交采样;正交压缩采样;约束等距特性

基金项目: 国家自然科学基金(No.61671245)

中图分类号: TN794

文献标识码: A

文章编号: 0372-2112(2023)03-0573-12

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.12263/DZXB.20210685

Time-Domain Analyses of Quadrature Compressive Sampling System

CHEN Sheng-yao¹, XI Feng¹, ZHANG Su-ling², LIU Zhong¹

(1. School of Electronic and Optical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;

2. School of Electronic Engineering, Nanjing Xiaozhuang University, Nanjing, Jiangsu 211171, China)

Abstract: Quadrature compressive sampling (QuadCS) can directly obtain the in-phase and quadrature components of radio signals at sub-Nyquist rates and is one of efficient analog-to-information systems sampling wideband/ultra-wideband signals. This paper studies the QuadCS system properties from the time-domain point of view. Firstly, the sensing matrix describing QuadCS system is derived in time-domain, and it is further decomposed into three components. Then with the decomposition structure, the QuadCS reconstructability is simply built in virtue of the theory of unit-norm tight frame. Finally, the signal power and the noise variance in the QuadCS output are analyzed, the signal-to-noise ratios before and after the QuadCS system are proved to keeps intact, and the SNR loss after reconstruction is given. The work of this paper further improves the theory of QuadCS.

Key words: compressive sensing; analog-to-information conversion; quadrature sampling; quadrature compressive sampling; restricted isometry property

Foundation Item(s): National Natural Science Foundation of China (No.61671245)

1 引言

模信转换(Analog-to-Information Conversion, AIC)是一种面向稀疏模拟信号的欠采样系统. 自AIC概念建立以来^[1],人们根据不同的应用背景,提出了多种不同的AIC系统,典型的包括随机滤波^[2]、随机解调^[1,3]、调制宽带转换器^[4]、以及在此基础上发展的适用不同类型信号的AIC变型,比如Xampling^[5]、正交压缩采样(Quadrature Compressive Sampling, QuadCS)^[6]等. 平行于ADC理论,这些AIC可广义地分为面向低通信号的AIC^[1-3,5]、带通信号的AIC^[6]和多带信号的AIC^[4]. 对于

雷达通信等射频信号采样场合,我们在文献[6]中提出的QuadCS是能够直接获取射频信号同相和正交(I/Q)支路信号的带通型AIC.

QuadCS是一种架构于随机解调和正交采样建立起来的AIC,由于其低速获取I/Q支路信号的能力,在雷达信号采集和处理中获得了深入的研究. 由于AIC采样数据不同于奈奎斯特采样数据,传统雷达信号处理理论难以直接应用于处理AIC数据. 针对QuadCS数据,我们建立了相应的雷达信号处理理论. 文献[6]首次报道了AIC结构并证明了脉冲雷达信号的可重构性,文献

[7]分析了 QuadCS 的噪声特性,文献[8~10]给出了雷达回波全程数据滑动重构方法;文献[11~20]发展了基于 QuadCS 数据的雷达信号处理,其中文献[11~13]建立了网格上目标的脉冲多普勒处理理论,文献[14~17]讨论了非网格上目标参数估计技术,文献[18,19]研究了条带模式 SAR 成像技术,文献[20]将 QuadCS 推广到多带雷达情形.这些工作为宽带/超宽带雷达发展奠定了理论和技术基础.

应当指出,文献[6]建立的 QuadCS 分析理论是在 QuadCS 频域描述基础上发展起来的,其基本思想是将感知矩阵在频域分解成不同单元,然后采用测度集中(Concentration of Measure, CoM)不等式^[21]证明其在一定条件下满足约束等距特性(Restricted Isometry Property, RIP).这种分析是可行的,但是可重构条件是根据感知矩阵的频域特性给出的,RIP 特性分析没有考虑感知矩阵的结构特点,因此,证明过程冗长.同时,这种频域分析不利于直接研究 QuadCS 输出信号和噪声特性.

本文以脉冲雷达回波信号采样为应用背景,基于 QuadCS 的时域描述,分析 QuadCS 的可重构性和信噪比特性. QuadCS 感知矩阵与 QuadCS 扩频信号、带通滤波和雷达发射波形密切相关,难以直接研究其可重构性.本文在分析 QuadCS 感知矩阵时域描述的基础上,将感知矩阵有效地分解成 QuadCS 不同组成单元描述矩阵乘积的形式,这种分解不仅使得我们可以分析 QuadCS 不同组成对 QuadCS 的贡献,而且非常容易地采用单位范数紧框架(Unit-Norm Tight Frame, UTF)理论^[22]研究 QuadCS 的可重构性.同时,QuadCS 感知矩阵的时域分解方便了 QuadCS 输出信号和噪声特性分析,可获得严格的输入输出信噪比关系以及重构信噪比与系统参数之间的关系,为实际系统设计提供了理论依据.

2 信号模型和稀疏表示

考虑由 K 个静止点目标组成的雷达场景.假设这些目标位于距离分辨单元上,则在基带信号为 $\tilde{g}(t) = a(t)e^{j\theta(t)}$ 的雷达信号照射下,雷达接收的中频为 F_{IF} 的中频信号可表示为

$$r_{IF}(t) = \sum_{k=1}^K \rho_k a(t - \tau_k) \cos[2\pi F_{IF} t + \theta(t - \tau_k) + \phi_k] = \text{Re} \left\{ e^{j2\pi F_{IF} t} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}_k \tilde{g}(t - k\tau_{res}) \right\} \quad (1)$$

其中, ρ_k 和 ϕ_k 分别是位于第 k 个分辨单元的目标的反射系数和相位偏移, τ_{res} 为目标距离分辨率, $\tau_k = k\tau_{res}$, N 是观测时间 T 内目标距离分辨单元个数(对带宽为 B 的雷达波形, $N = \lceil T/\tau_{res} \rceil$, τ_{res} 等于奈奎斯特采样间隔 $T_s = 1/B$), $\tilde{\rho}_k = \rho_k e^{j\phi_k}$ 为对应的复反射系数.当 $\tilde{\rho}_k \neq 0$ 时,第 k 个分辨单元上存在目标;否则不存在目标.

定义 $\tilde{r}(t)$ 为 $r_{IF}(t)$ 的基带信号

$$\tilde{r}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}_k \tilde{g}(t - k\tau_{res}) \quad (2)$$

根据式(1)和式(2)可知,雷达场景的回波可表示成分辨单元上目标回波的组合.记 $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{g}(t - k\tau_{res})$,即 $\tilde{\psi}_k(t)$ 是 $\tilde{g}(t)$ 的时移波形,定义 $\tilde{\Psi}(t) = (\tilde{\psi}_0(t), \tilde{\psi}_1(t), \dots, \tilde{\psi}_{N-1}(t))$,则式(2)又可表示为

$$\tilde{r}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}_k \tilde{\psi}_k(t) = \tilde{\Psi}(t) \tilde{\rho} \quad (3)$$

其中 $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_{N-1})^T$ 表示复反射系数向量.式(3)进一步表明,雷达场景回波可表示成时移波形集合 $\{\tilde{\psi}_k(t): k=0, 1, \dots, N-1\}$ 的线性组合.习惯上把 $\{\tilde{\psi}_k(t): k=0, 1, \dots, N-1\}$ 叫做雷达回波的波形匹配字典,这是因为 $\tilde{\psi}_k(t)$ 与基带波形 $\tilde{g}(t)$ 相匹配.

式(3)中, $\tilde{\rho}$ 中非零元素的个数为雷达目标个数 K , $K = \|\tilde{\rho}\|_0$.如果 $K \ll N$,雷达回波信号是稀疏的,稀疏度为 K .稀疏回波也常常称为稀疏目标.

3 正交压缩采样系统

QuadCS 系统如图 1 所示,由低速采样、正交解调和稀疏重构三个模块组成.

在低速采样模块中,回波信号 $r_{IF}(t)$ 首先采用随机调制信号 $p(t)$ 对其进行混频处理产生扩频信号,然后对扩频信号进行带通滤波输出压缩带通信号 $y_{IF}(t)$,最后再采用正交采样^[23]实现压缩测量.带通滤波器 $h_{BP}(t)$ 中心频率设置在 F_{IF} ,带宽 $B_{cs} \ll B$,因此可以采用低速中频 ADC 实现 $y_{IF}(t)$ 的低速采样.低速采样模块类似于随机解调 AIC^[3],但是由于处理的是带通信号,低速采样模块组成单元功能和实现方式并不等同于随机解调.首先,随机调制信号 $p(t)$ 是根据 $r_{IF}(t)$ 的带宽 B 进行设置,而随机解调 AIC 是根据 $r_{IF}(t)$ 的最高频率确定的.一般地,采用随机二相码信号实现随机调制信号

$$p(t) = \varepsilon_k, \quad t \in \left[k/B_p, (k+1)/B_p \right), \quad k=0, 1, \dots \quad (4)$$

其中 $B_p \geq B$, $\varepsilon_k = \pm 1$.因此,QuadCS 中随机调制信号实现方便;其次,QuadCS 采样带通滤波器,而随机解调 AIC 采用低通滤波;最后,在 ADC 的使用方式上,QuadCS 采用正交采样,而随机解调 AIC 采用低通采样.

根据图 1 可知,带通滤波输出的压缩信号为

$$y_{IF}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{BP}(\tau) p(t-\tau) r_{IF}(t-\tau) d\tau = \text{Re} \{ \tilde{y}(t) e^{j2\pi F_{IF} t} \} \quad (5)$$

其中 $\tilde{y}(t)$ 是回波信号 $r_{IF}(t)$ 的压缩复包络信号

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{BP}(\tau) e^{-j2\pi F_{IF} \tau} p(t-\tau) \tilde{r}(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

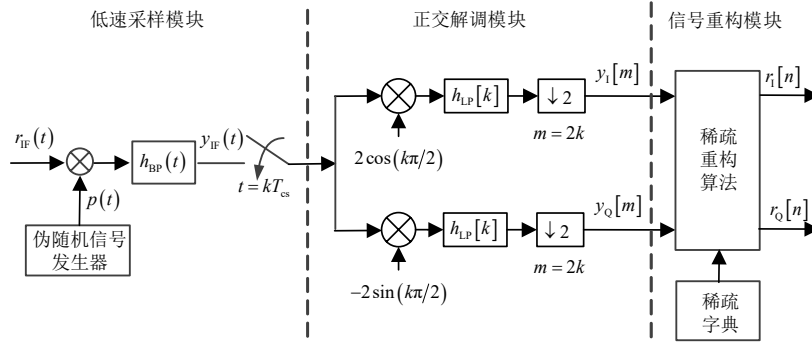


图1 正交压缩采样系统框图

$\tilde{y}(t)$ 又可表示成 $\tilde{y}(t) = y_I(t) + jy_Q(t)$,其中 $y_I(t)$ 和 $y_Q(t)$ 分别是 $\tilde{y}(t)$ 的同相压缩分量和正交压缩分量.

信号 $y_{IF}(t)$ 是带宽为 B_{cs} 的带通信号,根据正交采样原理^[23],设置采样频率 $f_{cs} = 4F_{IF}/(4l + 1)$,其中 l 为正整数且满足 $l \leq \lfloor (F_{IF} - B_{cs}/2)/(2B_{cs}) \rfloor$,则 $y_{IF}(t)$ 的带通采样值 $y_{IF}[n]$ 可表示为

$$y_{IF}[n] = y_{IF}(t) \Big|_{t = n/f_{cs}} = \text{Re} \left\{ \tilde{y}(n/f_{cs}) e^{j2\pi F_{IF} n/f_{cs}} \right\} = y_I(n/f_{cs}) \cos(n\pi/2) - y_Q(n/f_{cs}) \sin(n\pi/2) \quad (7)$$

其中 $y_I(n/f_{cs})$ 是 $r_{IF}(t)$ 的同相压缩分量 $y_I(t)$ 的采样, $y_Q(n/f_{cs})$ 是 $r_{IF}(t)$ 的正交压缩分量 $y_Q(t)$ 的采样.

应注意,我们可将滤波器 $h_{BP}(t)$ 表示为

$$h_{BP}(t) = h_{LP}(t) \cos(2\pi F_{IF} t) \quad (8)$$

其中 $h_{LP}(t)$ 是同 $h_{BP}(t)$ 具有相同带宽的低通滤波器,则 $\tilde{y}(t)$ 又可表示为

$$\tilde{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_{LP}(\tau) p(t-\tau) \tilde{r}(t-\tau) d\tau \quad (9)$$

这是因为 $p(t)\tilde{r}(t)$ 是一个低通信号,不包含高频分量.式(9)的描述形式对后续理论分析是有帮助的.

正交解调模块的功能是从采样序列 $y_{IF}[n]$ 中提取同相压缩分量 $y_I[m]$ 和正交压缩分量 $y_Q[m]$;其工作原理与传统的正交采样一致,即首先进行解调处理,然后通过低通滤波滤除高频分量,最后进行2倍降采样得到 $y_I[m]$ 和 $y_Q[m]$.对于理想低通滤波器,可以得到

$$y_I[m] = y_I(mT_{cs}), \quad y_Q[m] = y_Q(mT_{cs}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

其中 $T_{cs} = 2/f_{cs}$.根据式(10),可以得到压缩信号 $\tilde{y}(t)$ 的等价压缩测量 $\tilde{y}[m]$ 为

$$\tilde{y}[m] = \tilde{y}(mT_{cs}) = y_I[m] + jy_Q[m] \quad (11)$$

在观测时长 T 内,可获得 $M = \lfloor T/T_{cs} \rfloor$ 个压缩测量.

由于 $B_{cs} \ll B$,压缩测量的个数 M 将远小于回波信号的奈奎斯特采样个数 $N, M \ll N$.我们将 $\Delta = N/M$ 或 $\Delta = T_{cs}/T_s$ 定义为正交压缩采样系统降采样率;当按照最小采样速率采样时,降采样率又可表示为 $\Delta = B/B_{cs}$.

将式(3)代入式(6),则式(11)可表示为

$$\tilde{y}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}_k \int_{-\infty}^{+\infty} h_{BP}(\tau) e^{-j2\pi F_{IF} \tau} p(mT_{cs} - \tau) \times \tilde{\psi}_k(mT_{cs} - \tau) d\tau \quad (12)$$

定义

$$\tilde{A}_{mk} = h_{BP}(\tau) e^{-j2\pi F_{IF} \tau} p(mT_{cs} - \tau) \times \tilde{\psi}_k(mT_{cs} - \tau) d\tau \quad (13)$$

式(12)可简化为

$$\tilde{y}[m] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{\rho}_k \tilde{A}_{mk} \quad (14)$$

定义测量向量 $\tilde{\mathbf{y}}$ 和感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 分别为

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}[0], \dots, \tilde{y}[M-1]]^T \in \mathbb{C}^M, \quad \tilde{\mathbf{A}} = [\tilde{A}_{mk}] \in \mathbb{C}^{M \times N} \quad (15)$$

则采用向量矩阵描述语言,式(14)可表示为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\boldsymbol{\rho}} \quad (16)$$

式(16)称为QuadCS的压缩测量方程,感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 完整地刻画了QuadCS系统.在观测时间内, $M < N$,因此,式(16)是一个欠定线性方程组,直接求解 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ 是一个NP-难问题.根据压缩感知理论^[24],如果感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 满足RIP,可以通过稀疏重构技术重构 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$.矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 满足具有参数 δ_K 的RIP特性,是指对所有的 K 稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$ 下面不等式成立.

$$(1 - \delta_K) \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}\|_2^2 \leq \|\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\rho}}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}\|_2^2 \quad (17)$$

矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的RIP特性表明矩阵对任意 K 稀疏向量 $\tilde{\boldsymbol{\rho}}$,当将其从 N 维空间映射到 M 维空间时,具有近似保范性,因此保留了稀疏信号的信息,能够进行重构.基于 l_1 -范数优化的重构可表示为

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \arg \min_{\tilde{\boldsymbol{\rho}}} \|\tilde{\boldsymbol{\rho}}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\boldsymbol{\rho}} \quad (18)$$

在噪声环境下,式(18)的信号重构问题转化为

$$\hat{\rho} = \arg \min_{\hat{\rho}} \|\hat{\rho}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{A}}\hat{\rho}\|_2 \leq \varepsilon \quad (19)$$

其中 ε 是由压缩测量噪声决定在正常数. 目前存在大量重构方法可求解式(18)和式(19), 详情可参阅文献[25].

4 正交压缩采样可重构性分析

由式(13)可知,感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 与 QuadCS 系统的扩频信号 $p(t)$ 、带通滤波 $h_{\text{BP}}(t)$ 以及雷达波形 $\tilde{g}(t)$ 等描述单元密切相关. 因此,直接研究 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的 RIP 特性理论上较为困难. 本节将根据 QuadCS 特点,从时域将 $\tilde{\mathbf{A}}$ 分解成不同组成单元描述的矩阵乘积形式,然后采用单位范数紧框架理论^[21]研究 QuadCS 的可重构性.

为了简化分析,假设 QuadCS 满足如下假设.

A1: 带通滤波器 $h_{\text{BP}}(t)$ 是一个理想的滤波器,其频率响应为

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{BP}}(j\Omega) &= \hat{H}_{\text{LP}}(j(\Omega - 2\pi F_{\text{IF}})) \\ &\quad + \hat{H}_{\text{LP}}(j(\Omega + 2\pi F_{\text{IF}})) \end{aligned} \quad (20)$$

其中 $\hat{H}_{\text{LP}}(j\Omega)$ 是理想低通滤波器的频率响应

$$\hat{H}_{\text{LP}}(j\Omega) = \begin{cases} B/B_{\text{cs}}, & -\pi B_{\text{cs}} \leq \Omega \leq \pi B_{\text{cs}} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (21)$$

增益系数 B/B_{cs} 用于保证信号在滤波后能量不发生变化.

A2: 调制信号 $p(t)$ 是一个随机二相码周期信号,其码片速率为 $B_p = cB$,周期长度为观测时长 T . 因此, $p(t)$ 可采用长度为 cN 的二相码描述,即 $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{cN-1}\}$, $p(t) = \varepsilon_n$, $t \in [nT_s/c, (n+1)T_s/c)$, $n = 0, 1, \dots, cN-1$, ε_n 等概率的取值 $+c$ 或 $-c$.

A3: 压缩带通信号 $y(t)$ 的中频采样频率为最小允许采样速率 $f_{\text{cs}} = 2B_{\text{cs}}$,采样间隔 $T_{\text{cs}} = 1/B_{\text{cs}}$.

A4: 回波信号的奈奎斯特采样个数和正交压缩采样个数均为整数,且观测时长 T 满足 $T = N/B = M/B_{\text{cs}}$,即 $NT_s = MT_{\text{cs}}$.

假设 A2 是进行 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的时域分解时需要的,其它假设将应用于 RIP 特性分析. 从理论分析的角度,这些假设是合理的,简化了数学描述. 应当指出,本节的理论分析将码片速率设置为 $B_p = cB$,其中 c 是不小于 2 的正整数. 但是,在系统实现中,可取 $c=1$,即码片速率为信号带宽,第 6 节数值仿真实验证明了上节讨论的压缩采样仍然正确.

4.1 感知矩阵的时域分解

考虑式(15)给出的感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$,根据带通滤波器和低通滤波器的关系式(8), $\tilde{\mathbf{A}}$ 的元素 \tilde{A}_{mk} 又可表示为

$$\tilde{A}_{mk} = \int_0^T h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - \tau) p(\tau) \tilde{\psi}_k(\tau) d\tau \quad (22)$$

现采用分段积分实现式(22)的计算,分段积分长度设置为 $p(t)$ 的码宽,即奈奎斯特采样间隔 T_s 的 $1/c$,式(22)可分解为

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mk} &= \sum_{n=0}^{cN-1} \int_{nT_s/c}^{(n+1)T_s/c} h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - \tau) p(\tau) \tilde{\psi}_k(\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{cN-1} \varepsilon_n \int_{nT_s/c}^{(n+1)T_s/c} h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - \tau) \tilde{\psi}_k(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (23)$$

在分段积分间隔 $[nT_s/c, (n+1)T_s/c]$ 内, $\tilde{\psi}_k(\tau)$ 和 $h_{\text{LP}}(\tau)$ 可采用其采样值近似,即 $\tilde{\psi}_k(\tau) \approx \tilde{\psi}_k(nT_s/c)$, $h_{\text{LP}}(\tau) \approx h_{\text{LP}}(nT_s/c)$,则式(23)可近似为

$$\tilde{A}_{mk} \approx \frac{T_s}{c} \sum_{n=0}^{cN-1} \varepsilon_n h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - nT_s/c) \tilde{\psi}_k(nT_s/c) \quad (24)$$

在式(23)的积分项中, h_{LP} 的带宽 B_{cs} 小于 B ,因此,式(24)的近似是合理的, c 越大,分段积分间隔越小,式(24)的近似越准确. 定义 $\mathbf{H} = [H_{mn}] \in \mathbb{R}^{M \times cN}$, $\mathbf{P} = (1/c) \text{diag}\{\varepsilon_n\} \in \mathbb{R}^{cN \times cN}$, $\tilde{\Psi} = [\tilde{\Psi}_{nk}] \in \mathbb{C}^{cN \times N}$,其中, $H_{mn} = T_s h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - nT_s/c)$, $\tilde{\Psi}_{nk} = \tilde{\psi}_k(nT_s/c)$,则采用矩阵形式可将矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 描述为

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{H}\mathbf{P}\tilde{\Psi} \quad (25)$$

式(25)表明,QuadCS 系统的感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 可有效地分解成三个矩阵因子 \mathbf{H} 、 \mathbf{P} 和 $\tilde{\Psi}$. 其中, \mathbf{H} 刻画了带通滤波和低速采样, \mathbf{P} 刻画了随机调制处理,而 $\tilde{\Psi}$ 描述了波形匹配字典. 因此, $\tilde{\Psi}\hat{\rho}$ 是雷达回波基带信号 $\tilde{r}(t)$ 的采样,矩阵 $\mathbf{H}\mathbf{P}$ 实现了对采样信号 $\tilde{\Psi}\hat{\rho}$ 的压缩测量. 定义 $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\Psi}\hat{\rho}$ 为 $\tilde{r}(t)$ 的采样向量, $\Phi = [\Phi_{mn}] = \mathbf{H}\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{M \times cN}$ 为测量矩阵,则正交压缩采样信号向量 $\hat{\mathbf{y}}$ 可表示为

$$\hat{\mathbf{y}} = \Phi\tilde{\mathbf{r}} \quad (26)$$

与一般正交基底测量模型不同,信号 $\tilde{\mathbf{r}}$ 的长度为奈奎斯特采样长度的 c 倍.

4.2 感知矩阵的 RIP 分析

在分析感知矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的 RIP 特性之前,介绍一个重要的引理.

引理 1^[22] 对于矩阵 $\tilde{\Theta} = \tilde{\mathbf{V}}\Sigma\tilde{\mathbf{U}}$,当矩阵 $\tilde{\mathbf{V}} \in \mathbb{C}^{M \times L}$ 是一个单位范数紧框架、对角矩阵 $\Sigma = \text{diag}(\boldsymbol{\varepsilon}) \in \mathbb{C}^{L \times L}$ 的对角元素服从零均值单位方差的 σ -亚高斯独立分布、矩阵 $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathbb{C}^{L \times N}$ 是一个列标准正交矩阵 $\tilde{\mathbf{U}}^H\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{I}_N$ 时,则对于任意 $\delta \in (0, 1)$,如果有

$$M \geq C_1 \delta^{-2} KL \mu^2(\tilde{\mathbf{B}}) (\log^2 K) (\log^2 \hat{N}) \quad (27)$$

其中 C_1 是一个依赖于 σ 的正常数, $\hat{N} = \max\{L, N\}$, $\mu(\tilde{\mathbf{B}})$ 是矩阵 $\tilde{\mathbf{B}}$ 中所有元素幅值的最大值,那么矩阵 $\tilde{\Theta}$ 的 K -

阶约束等距常数 δ_K 以不低于 $1 - \hat{N}^{-\log \hat{N} \log^2 K}$ 的概率满足 $\delta_K \leq \delta$.

引理 1 在分析如式(25)描述的感知矩阵的 RIP 特性方面的重要性是显而易见的,只要分解矩阵 \tilde{V} 、 Σ 和 \tilde{U} 满足相应的条件,感知矩阵 $\tilde{\Theta}$ 即满足 K -阶约束等距常数 δ_K 的 RIP 特性.

从式(25)可以看到,感知矩阵 \tilde{A} 具有矩阵 $\tilde{\Theta}$ 类似的结构,因此,可以采用引理 1 分析矩阵 \tilde{A} 的 RIP 特性.

定理 1 对于正交压缩采样系统,当波形匹配字典 $\tilde{\Psi}$ 为标准列正交基(即 $\tilde{\Psi}^H \tilde{\Psi} = I_N$)时,如果测量个数满足

$$M \geq C \delta_K^{-2} K c N \mu^2 (\tilde{\Psi}) \log^2 K \log^2 (cN) \quad (28)$$

则矩阵 $\tilde{A} \triangleq H P \tilde{\Psi}$ 以不低于 $1 - (cN)^{-\log(cN) \log^2 K}$ 的概率满足 K -阶约束等距常数为 δ_K 的 RIP 特性,即下面不等式成立

$$(1 - \delta_K) \|\tilde{\rho}\|_2^2 \leq \|\tilde{A} \tilde{\rho}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\tilde{\rho}\|_2^2 \quad (29)$$

其中 C 是一个正常数.

证明 根据波形匹配字典定义, $\tilde{\psi}_k(t) = \tilde{g}(t - k\tau_{res})$, 可以知道字典矩阵 $\tilde{\Psi}$ 的列正交性等价于复基带信号 $\tilde{g}(t)$ 具有平坦谱. 在雷达应用中,为获得高距离分辨率,雷达波形通常被设计为大带宽平坦谱,例如线性调频信号和相位编码波形等. 因此,典型的宽带雷达波形均满足波形匹配字典是列正交的假设^[6],即 $\tilde{\Psi}$ 满足 $\tilde{\Psi}^H \tilde{\Psi} = I_N$.

因此,只要矩阵 P 和 H 满足相应的条件,则根据引理 1,定理 1 就成立. 矩阵 P 满足引理 1 矩阵 Σ 的要求是显而易见的,这是因为矩阵 P 的对角元素其实是等概率取值为 ± 1 的随机二相码.

对于矩阵 H ,只要证明矩阵 $\sqrt{M/(cN)} H$ 的所有行向量形成标准正交族,则 H 就是一个单位范数紧框架^[26]. 为此,考虑任意两个行向量之间的内积,有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{cN-1} H_{mn} H_{m'n} &= \sum_{n=0}^{cN-1} T_s^2 h_{LP}(mT_{cs} - nT_s/c) \\ &\quad \times h_{LP}(m'T_{cs} - nT_s/c) \end{aligned} \quad (30)$$

其中, $m, m' = 0, 1, \dots, M-1$, $h_{LP}(mT_{cs} - nT_s/c)$ 为 $h_{LP}(mT_{cs} - t)$ 按照采样间隔 T_s/c 获得的时间序列. 根据离散时间和连续时间傅里叶变换之间的关系,可以得出 $h_{LP}(mT_{cs} - nT_s/c)$ 的离散时间傅里叶变换为 $(c/T_s) \sum_k \hat{H}_{LP}(-jc(\omega - 2\pi k)/T_s) e^{-jmT_{cs}(\omega - 2\pi k)/T}$. 应当注意, $h_{LP}(nT_s/c)$ 是式(21)定义的低通滤波器的采样,相对于观测时间 T , $h_{LP}(nT_s/c)$ 的能量集中在短的时间范围内,因此,根据假设 A1 和帕斯瓦尔定理,经简单的化简,式

(30)可近似为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{cN-1} H_{mn} H_{m'n} &\approx \frac{c^2}{2\pi} \left(\frac{B}{B_{cs}}\right)^2 \int_{-\pi B_{cs} T_s/c}^{\pi B_{cs} T_s/c} e^{jmT_{cs} \frac{c\omega}{T_s}} e^{-jm'T_{cs} \frac{c\omega}{T_s}} d\omega \\ &= \frac{cN}{M} \text{sinc}(m - m') \end{aligned} \quad (31)$$

在进行式(31)的最后简化时,充分利用了假设 A4 的关系. 式(31)表明

$$\sum_{n=0}^{cN-1} H_{mn} H_{m'n} = \begin{cases} \frac{cN}{M}, & m = m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases} \quad (32)$$

根据式(32)可知,矩阵 $\sqrt{M/(cN)} H$ 的所有行向量形成标准正交族. 综上所述,矩阵 \tilde{A} 是满足 RIP 特性的感知矩阵,证毕.

在实际雷达系统中,雷达发射波形通常为恒包络的. 对时宽为 T_b 的雷达波形,基底 $\tilde{\Psi}$ 每一列中非零元素个数为 $cT_b B$ 个,且幅度相同. 由于 $\tilde{\Psi}$ 是按列标准正交的, $\mu(\tilde{\Psi}) = 1/\sqrt{cT_b B}$. 对占空比为 $d_t = T_b/T$ 的脉冲波形,则根据定理 1,测量个数可表示为

$$M \geq C \delta_K^{-2} d_t^{-1} K \log^2 K \log^2 (cN) \quad (33)$$

即所需的压缩测量个数 M ,近似线性比例正比于稀疏度 K ,对数平方比例正比于回波信号的维数 N ,反比于占空比 d_t .

如果将 $M = B_{cs} T$ 和 $N = BT$ 代入式(33),可以建立压缩带宽 B_{cs} 、信号带宽 B 和观测时间 T 之间的关系,即

$$B_{cs} \geq C \delta_K^{-2} d_t^{-1} (K/T) \log^2 K \log^2 (cBT) \quad (34)$$

式(34)表明,如果压缩带宽满足 $B_{cs} = \mathcal{O}(K/T) \log^2 K \log^2 (BT)$,QuadCS 系统能够以极高的概率成功重构出稀疏基带信号. 不同于传统正交采样,QuadCS 系统的采样速率由压缩带宽 B_{cs} 决定,即正比于雷达回波中目标的个数 K ,反比于观测时间 T . 文献[6]中基于频域描述的 RIP 分析要求压缩带宽 B_{cs} 应满足 $B_{cs} = \mathcal{O}((K^2/T) \log(BT))$. 与文献[6]相比,式(34)要求更小的压缩带宽,因此是一种更加紧致的理论性能边界.

5 输出信噪比和重构信噪比分析

考虑含有噪声的中频接收信号

$$\begin{aligned} r_{IF}(t) &\approx \rho_0 a(t - \tau_0) \cos[2\pi F_{IF} t + \theta(t - \tau_0) + \phi_0] \\ &\quad + w_{IF}(t) \end{aligned} \quad (35)$$

其中,假设只有一个目标存在且位于某个距离门上, ρ_0 、 τ_0 和 ϕ_0 分别是该目标的反射系数、时延和相位偏移, $w_{IF}(t)$ 是中心频率为 F_{IF} 、带宽为 B 、功率谱密度为 $N_w/2$ 的双边带高斯白噪声信号,噪声信号功率为 $\sigma_w^2 = BN_w$. 假设雷达发射信号的能量为 E_b ,则 QuadCS 系统输入信号和噪声的功率比(即输入信噪比)为

$$\text{SNR}_{\text{IN}}^{\text{QuadCS}} = \frac{|\rho_0|^2 E_b}{T_b B N_w} \quad (36)$$

其中 T_b 为雷达发射信号脉冲宽度.

为了方便分析,假设 QuadCS 系统满足第 4 节的假设 A1~A4. 记 $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_0, \tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_{cN-1})^T$ 为噪声信号 $w_{\text{IF}}(t)$ 的基带信号采样向量,则 $\tilde{\mathbf{w}}$ 是均值为 0、方差为 σ_w^2 的白噪声向量. 正交压缩测量如式(16)所示,根据感知矩阵的分解式(25)和式(26),QuadCS 输出压缩采样信号为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \Phi(\tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{w}}) \quad (37)$$

记 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} = \Phi\tilde{\mathbf{w}}$, 式(37)又可表示为

$$\tilde{\mathbf{y}} = \Phi\tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \quad (38)$$

5.1 输出信噪比分析

根据式(38),可以得到 QuadCS 系统输出信号部分的能量为

$$\text{E}\left\{(\Phi\tilde{\mathbf{r}})^H(\Phi\tilde{\mathbf{r}})\right\} = \tilde{\mathbf{r}}^H \text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}\tilde{\mathbf{r}} \quad (39)$$

根据 Φ 的定义, $\text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}$ 的第 (n, n') 个元素可表示为

$$\begin{aligned} \text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}_{(n, n')} &= \text{E}\left\{\sum_{m=0}^{M-1} (\varepsilon_n/c) H_{mn} (\varepsilon_{n'}/c) H_{mn'}\right\} \\ &= \frac{1}{c^2} \sum_{m=0}^{M-1} H_{mn} H_{mn'} \text{E}\left\{\varepsilon_n \varepsilon_{n'}\right\} \\ &= \begin{cases} \sum_{m=0}^{M-1} H_{mn} H_{mn}, & n = n' \\ 0, & n \neq n' \end{cases} \end{aligned} \quad (40)$$

其中 $n, n' = 0, 1, \dots, cN-1$, 最后一项化简利用了第 4 节假设 A2. 因此, 矩阵 $\text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}$ 是一个对角矩阵. 类似于式(31)的推导, 可以得到 $\text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}$ 的对角元素为

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} H_{mn} H_{mn} &= T_s^2 h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - nT_{\text{sc}}/c) \\ &\quad \times h_{\text{LP}}(mT_{\text{cs}} - nT_{\text{sc}}/c) = 1 \end{aligned} \quad (41)$$

式(40)和式(41)说明矩阵 $\text{E}\left\{\Phi^H\Phi\right\}$ 是单位矩阵, 矩阵 Φ 的所有列向量形成标准正交族, 式(39)等效为

$$\text{E}\left\{(\Phi\tilde{\mathbf{r}})^H(\Phi\tilde{\mathbf{r}})\right\} = \tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}} \quad (42)$$

其中 $\tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}}$ 是在 c 倍奈奎斯特采样速率情况下获得的采样信号能量, 等于 c 倍奈奎斯特采样信号能量. 信号 $r_{\text{IF}}(t)$ 的奈奎斯特采样信号能量又等于 $r_{\text{IF}}(t)$ 的平均功率与奈奎斯特采样序列长度(时间带宽积 $T_b B$)的乘积, 即 $|\rho_0|^2 (E_b/T_b) T_b B$, 因此, QuadCS 系统输出信号部分的能量为

$$\tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}} = \frac{c|\rho_0|^2 E_b}{T_b} T_b B \quad (43)$$

根据式(39)和式(43)可知, QuadCS 系统输出信号

平均功率为

$$\frac{\tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}}}{M} = \frac{c|\rho_0|^2 E_b}{T_b} T_b B = \frac{c\Delta|\rho_0|^2 E_b}{T_b} \frac{T_b}{T} \quad (44)$$

对 QuadCS 系统, 由于扩频、滤波等预处理, 其输出信号 $\Phi\tilde{\mathbf{r}}$ 不再是严格意义上的脉冲波形. 脉冲型雷达波形的信号平均功率和信号(峰值)功率之间的关系在理论上不再适用于压缩测量信号 $\Phi\tilde{\mathbf{r}}$. 但是, 对大带宽平坦谱脉冲雷达波形, QuadCS 输出能量主要集中在脉冲宽度范围内, 因此, 信号平均功率与信号(峰值)功率的比值近似等于 T_b/T . 因此, QuadCS 系统输出信号功率为

$$\frac{\tilde{\mathbf{r}}^H \tilde{\mathbf{r}}}{M} \frac{T}{T_b} = \frac{c\Delta|\rho_0|^2 E_b}{T_b} \quad (45)$$

QuadCS 系统输出的噪声为 $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} = \Phi\tilde{\mathbf{w}}$; 对均值为 0 方差为 σ_w^2 的白噪声向量 $\tilde{\mathbf{w}}$, $\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}$ 是均值为 0、方差为 $\text{E}\left\{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}(\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}})^H\right\} = \sigma_w^2 \mathbf{I}$ 的白噪声向量. 为了求解 σ_w^2 , 考虑 $\text{E}\left\{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}(\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}})^H\right\}$ 的对角元素

$$\text{E}\left\{\left[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}^H\right]_{(m, m)}\right\} = \text{E}\left\{\left[\Phi\tilde{\mathbf{w}}\tilde{\mathbf{w}}^H\Phi^H\right]_{(m, m)}\right\} \quad (46)$$

将 Φ 代入上式, 经简单的化简, 可以得到

$$\begin{aligned} \text{E}\left\{\left[\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}^H\right]_{(m, m)}\right\} &= \text{E}\left\{\left(\sum_{n=0}^{cN-1} \Phi_{mn} \tilde{w}_n\right)\left(\sum_{n=0}^{cN-1} \Phi_{mn} \tilde{w}_n\right)^*\right\} \\ &= \sigma_w^2 \sum_{n=0}^{cN-1} H_{mn} H_{mn} = \sigma_w^2 \frac{cN}{M} \end{aligned} \quad (47)$$

其中最后一项利用了式(31)的结果. 因此, QuadCS 系统输出噪声方差为

$$\sigma_{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}}^2 = \sigma_w^2 \frac{cN}{M} = c\Delta N_w B = c\Delta^2 N_w B_{\text{cs}} \quad (48)$$

综合考虑式(45)和式(48), QuadCS 系统输出信噪比为

$$\text{SNR}_{\text{OUT}}^{\text{QuadCS}} = \frac{c\Delta|\rho_0|^2 E_b}{T_b} \frac{1}{c\Delta^2 N_w B_{\text{cs}}} = \frac{|\rho_0|^2 E_b}{\Delta T_b N_w B_{\text{cs}}} \quad (49)$$

注意, $\Delta = B/B_{\text{cs}}$, $\text{SNR}_{\text{OUT}}^{\text{QuadCS}}$ 与式(36)给出的输入信噪比一致. 这个结论的重要意义在于采样输出的目标信号功率与噪声功率比保持不变, 即没有产生信噪比损失. 值得注意的是, 尽管 QuadCS 系统没有改变输入信号在压缩采样前后的信噪比, 但是后续基于稀疏先验的信号重构是一个非线性运算, 其重构性能显著依赖于输入信噪比. 当输入信噪比低于一定取值后, 稀疏信号重构难以正确完成. 因此, 与传统基于线性信号重构的奈奎斯特采样不同, 压缩采样的适用范围受到稀疏信号输入信噪比的限制.

5.2 重构信噪比分析

在压缩感知理论中, 信号重构后的信噪比(重构信

噪比)也是一个重要的概念. 对 QuadCS 系统, 重构信噪比定义为

$$\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{QuadCS}} = \frac{\|\tilde{\rho}\|_2^2}{\|\tilde{\rho} - \hat{\rho}\|_2^2} \approx \frac{\|\tilde{A}\tilde{\rho}\|_2^2}{\|\tilde{A}(\tilde{\rho} - \hat{\rho})\|_2^2} \quad (50)$$

其中 $\hat{\rho}$ 是噪声环境下的 $\tilde{\rho}$ 重构向量, 第二个等式利用了感知矩阵 \tilde{A} 的 RIP 特性.

应当指出, 压缩采样下的信号重构本质上包含了稀疏系数 $\tilde{\rho}$ 的非零元素位置估计和幅度估计两部分. 其中, 非零元素位置估计是一个非线性处理过程, 其估计性能由输入信噪比、信号稀疏度和所采用的稀疏重构算法决定. 对于给定的稀疏信号和重构算法, 当输入信噪比超过一定门限时, 感知矩阵的 RIP 特性可保证非零元素位置能够精确重构^[27]. 因此, 下面重点研究非零元素位置正确估计的前提下, 压缩测量对重构信噪比的影响.

假定稀疏系数 $\tilde{\rho}$ 中非零元素个数为 K , 对应位置的索引集为 $A = \text{supp}(\tilde{\rho})$. 在奈奎斯特采样情况下, 对有噪接收信号 $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{w}}$ 通过匹配滤波处理, 可直接重构出稀疏系数, $\hat{\rho}_{\text{Nyq}} = \tilde{\Psi}^H(\tilde{\mathbf{r}} + \tilde{\mathbf{w}}) = \tilde{\rho} + \tilde{\Psi}^H\tilde{\mathbf{w}}$. 当接收信号的信噪比超过一定门限时, 非零元素位置可正确检测出来^[29]. 我们将式(51)定义为奈奎斯特采样速率下的重构信噪比

$$\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{Nyq}} = \frac{\|\tilde{\rho}_A\|_2^2}{\mathbb{E}\left\{\left\|\left(\tilde{\Psi}^H\tilde{\mathbf{w}}\right)_A\right\|_2^2\right\}} \quad (51)$$

其中, $\tilde{A}_A(\tilde{\rho}_A)$ 表示 $\tilde{A}(\tilde{\rho})$ 中索引在 A 中的列向量(元素)组成的子矩阵(子向量). 对于 QuadCS 系统, 当非零元素位置被正确估计出时, 非零幅度向量 $\tilde{\rho}_A$ 的估计值为

$$\hat{\rho}_A = \tilde{A}_A^\dagger \mathbf{y} = \tilde{A}_A^\dagger (\tilde{A}_A \tilde{\rho}_A + \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}) = \tilde{\rho}_A + \tilde{A}_A^\dagger \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \quad (52)$$

其它位置处的幅度为 0, 其中 \tilde{A}_A^\dagger 是矩阵 \tilde{A}_A 的伪逆. 此时, 式(50)中的重构信噪比简化为

$$\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{Oracle}} = \frac{\|\tilde{\rho}_A\|_2^2}{\mathbb{E}\left\{\left\|\tilde{A}_A^\dagger \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}\right\|_2^2\right\}} \quad (53)$$

其中 $\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{Oracle}}$ 是在位置已知情况下的重构信噪比^[27]. 比较式(51)和(53)可知, QuadCS 系统的重构信噪比相对于奈奎斯特采样速率下的重构信噪比损失为

$$\text{SNR}_{\text{LOSS}}^{\text{QuadCS}} = \frac{\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{Nyq}}}{\text{SNR}_{\text{REC}}^{\text{Oracle}}} = \frac{\mathbb{E}\left\{\left\|\tilde{A}_A^\dagger \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}\right\|_2^2\right\}}{\mathbb{E}\left\{\left\|\left(\tilde{\Psi}^H\tilde{\mathbf{w}}\right)_A\right\|_2^2\right\}} \quad (54)$$

利用感知矩阵 \tilde{A} 满足 RIP 和字典矩阵 $\tilde{\Psi}$ 列正交的

特性, 分别可以得到式(55)和式(56)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left\|\tilde{A}_A^\dagger \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}\right\|_2^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\text{Tr}\left\{\tilde{A}_A^\dagger \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}^H (\tilde{A}_A^\dagger)^H\right\}\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{\tilde{A}_A^\dagger \mathbb{E}\left\{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}} \tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}^H\right\} (\tilde{A}_A^\dagger)^H\right\} \\ &= \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}}^2 \text{Tr}\left\{\tilde{A}_A^\dagger (\tilde{A}_A^\dagger)^H\right\} \\ &= \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}}^2 \text{Tr}\left\{\left(\tilde{A}_A^H \tilde{A}_A\right)^{-1}\right\} \approx K \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}}^2 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left\|\left(\tilde{\Psi}^H\tilde{\mathbf{w}}\right)_A\right\|_2^2\right\} &= \mathbb{E}\left\{\text{Tr}\left\{\tilde{\Psi}_A^H \tilde{\mathbf{w}}_A \tilde{\mathbf{w}}_A^H \tilde{\Psi}_A\right\}\right\} \\ &= \text{Tr}\left\{\tilde{\Psi}_A^H \mathbb{E}\left\{\tilde{\mathbf{w}}_A \tilde{\mathbf{w}}_A^H\right\} \tilde{\Psi}_A\right\} \\ &= \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}}^2 \text{Tr}\left\{\tilde{\Psi}_A^H \tilde{\Psi}_A\right\} = K \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}}^2 \end{aligned} \quad (56)$$

因此, 重构信噪比损耗满足

$$\text{SNR}_{\text{LOSS}}^{\text{QuadCS}} \approx \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}}^2 / \sigma_{\tilde{\mathbf{w}}}^2 = cN/M \quad (57)$$

式(57)表明当带通滤波器带宽减少一半或压缩采样数减少一半时, 重构信噪比减少 3 dB, 即噪声折叠现象.

6 仿真实验

本节模拟仿真 QuadCS 系统性能, 以验证上述理论成果. 仿真内容主要包括扩频信号带宽 B_p 对重构性能的影响, 带通滤波带宽 B_{cs} 和信号稀疏度 K 及带宽 B 之间的关系, 以及噪声环境下 QuadCS 输出信噪比和信号重构误差等. 在这些仿真实验中, 假设目标位于距离分辨单元上, 所有的仿真结果都是在 500 次独立实验基础上平均得到的.

为节省篇幅, 仿真中雷达发射波形仅采用线性调频信号, 相位编码信号也可以获得类似的性能. 线性调频信号的复基带形式为

$$\tilde{g}(t) = \exp(j\pi B t^2 / T_b), \quad 0 \leq t \leq T_b$$

其中 T_b 是脉冲宽度, B 是信号带宽. 假设目标时延存在于时间间隔 $(0, T - T_b]$ 内, 则用于稀疏表示的波形匹配字典中原子个数为 $N = \lfloor B(T - T_b) \rfloor$. 对于第 k 个目标, 其时延 τ_k 随机分布在离散集合 $\{1/B, \dots, N/B\}$, 反射系数 ρ_k 和相位偏移 ϕ_k 分别均匀分布在 $(0, 1]$ 和 $(0, 2\pi]$ 范围内. 中频频率 f_{IF} 在 $[400 \text{ MHz}, 500 \text{ MHz}]$ 范围内调整, 以保证 $f_{\text{cs}} = 2B_{\text{cs}}$. 式(18)和式(19)采用 SPGL1 算法^[29]求解. 除非特别说明, 信号参数设置为 $B = 100 \text{ MHz}$, $T_b = 10 \mu\text{s}$ 和 $T = 20 \mu\text{s}$; QuadCS 系统中随机二相码的码率倍数 $c = 2$.

6.1 无噪情况下重构性能

对于无噪情形, 采用成功重构概率 (Probability of

Successful Reconstruction, PSR) 评估 QuadCS 重构性能. 定义相对重构误差 $E_r = \|\hat{\rho} - \rho\|_2 / \|\rho\|_2$, 其中 $\hat{\rho}$ 是式(18)的解. 当 $E_r \leq 10^{-3}$ 时, 认为信号被成功重构. 对于 N 次独立重构实验, 如果其中 Q 次实验的重构误差满足 $E_r \leq 10^{-3}$, 对应的成功重构概率为 $\text{PSR} = Q/N$.

图 2 给出了 PSR 与压缩带宽 B_{cs} 、稀疏度 K 和观测时间 T 之间的变化关系. 由图 2(a) 可知, 对于给定的稀疏度 K , 压缩带宽 B_{cs} 仅为信号带宽 B 的 5%~10% 时, 信号仍能以超过 99% 的概率成功重构. 当压缩带宽 B_{cs} 低于某个门限值时, 信号的 PSR 急剧下降. 从图 2(b) 可以看出, 对于给定的稀疏度 K , 大的压缩带宽 B_{cs} 具有高的 PSR. 在图 2(c) 中, 稀疏度为 $K=20$, 通过调节发射脉宽保证占空比 $d_t=0.5$. 由图可知, 对于给定的稀疏度 K 和 PSR, 观测时间 T 越大, 所需的压缩带宽 B_{cs} 越小. 上述结果均验证了式(34)中压缩带宽 B_{cs} 与稀疏度 K 和观测时间 T 的关系.

图 3 给出了不同码率倍数 c 情况下, PSR 随压缩带宽 B_{cs} 和稀疏度 K 变化的性能曲线. 图 4 给出了不同压缩带宽 B_{cs} 情况下, PSR 随码率倍数 c 变化的性能曲线. 从图 3 和图 4 可以发现 PSR 性能几乎不受码率倍数 c 的影响. 因此实际系统中可选择较小的码率倍数, 如 $c=1$, 以降低系统实现复杂度. 图 5 给出了不同占空比 d_t 情况下, PSR 随压缩带宽 B_{cs} 变化的性能曲线. 当占空比 d_t 较大时, 达到给定 PSR 所需的压缩带宽 B_{cs} 较小, 这与式(34)中反映的压缩带宽 B_{cs} 和占空比 d_t 的关系一致.

对于不同的稀疏度 K 和观测时间 T , 本文还仿真了成功重构所需最小压缩带宽 B_{cs} 的经验结果. 为了增强经验结果的说服力, 图 6 中还给出了相位编码发射波形的仿真结果, 相位编码波形的参数与文献[6]中一致.

假设 PSR 不低于 99%, 图 6(a) 为压缩带宽 B_{cs} 与稀疏度 K 之间的经验关系. 可以看成, 压缩带宽 B_{cs} 几乎与稀疏度 K 呈线性关系. 经过最小二乘拟合线性回归后, B_{cs} 满足如下关系

$$B_{cs} = 1.43(K/T) \log(BT/K) + 0.8 \times 10^6 \quad (58)$$

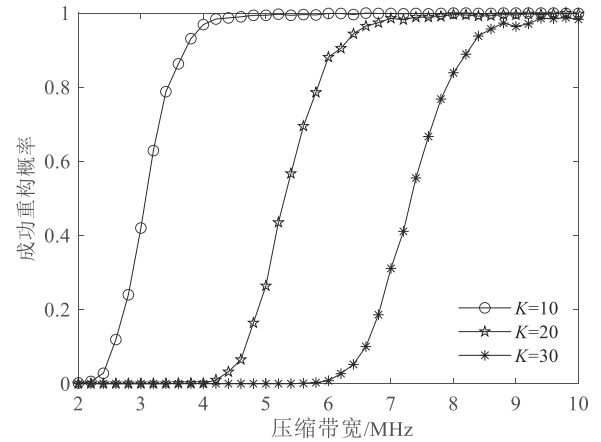
图 6(b) 为压缩带宽 B_{cs} 与观测时间 T 之间的经验关系. 最小二乘拟合线性回归结果表明 B_{cs} 满足

$$B_{cs} = 1.02(K/T) \log(BT/K) + 1.83 \times 10^6 \quad (59)$$

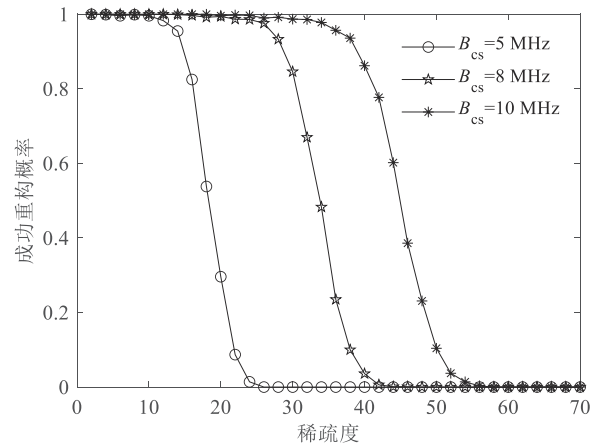
综合式(58)和式(59), 可以发现当 B_{cs} 满足

$$B_{cs} \geq 1.43(K/T) \log(BT/K) \quad (60)$$

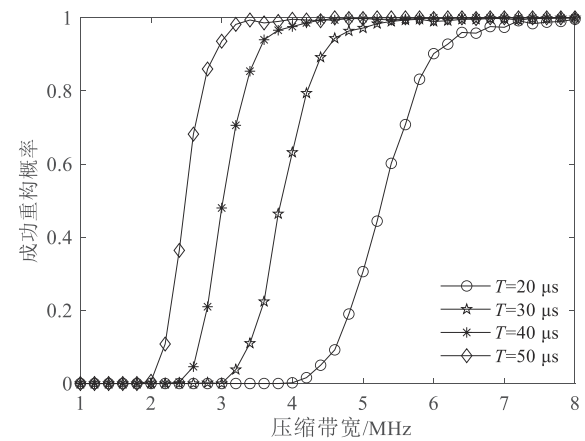
回波信号能够以极高的概率成功重构. 因此, QuadCS 系统实际所需的采样速率正比于信号的稀疏度 K 和信号时间带宽积 BT 的对数. 拟合实验表明, 如果压缩测量个数满足 $M = \mathcal{O}(K \log(N/K))$, 信号就能够以极高的



(a) 压缩带宽



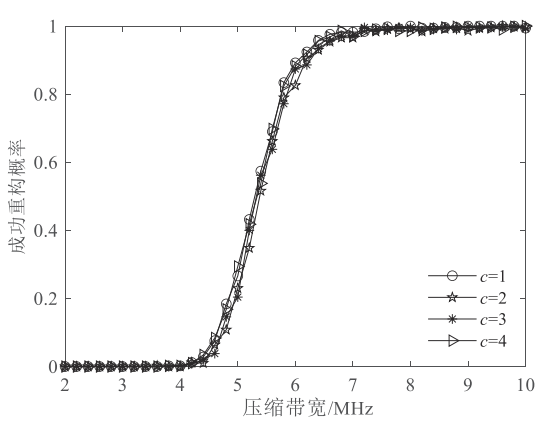
(b) 稀疏度



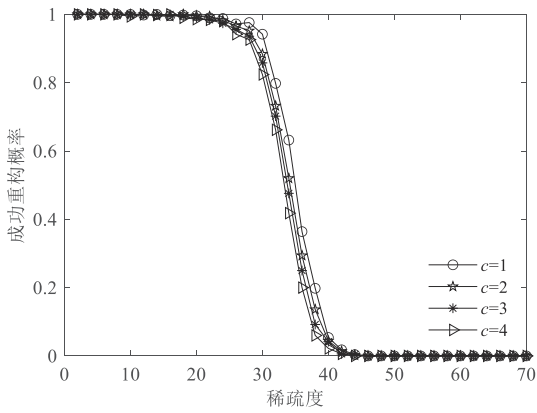
(c) 观测时间

图 2 PSR 随压缩带宽、稀疏度和观测时间变化的性能曲线

概率成功重构, 其中 $N=BT$ 是信号的奈奎斯特采样个数, 这与完全随机测量系统的性能几乎相同. 另一方



(a) 压缩带宽



(b) 稀疏度

图3 不同码率倍数 c 情况下,PSR 随压缩带宽与稀疏度变化的性能曲线

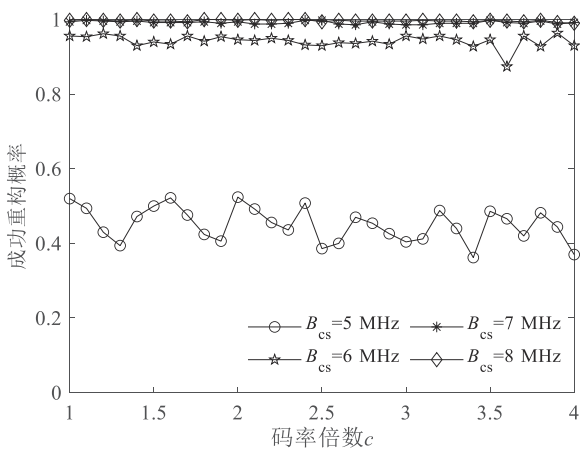


图4 不同压缩带宽情况下,PSR 随码率倍数变化的性能曲线($K=20$)

面,该结果还表明定理 1 给出的压缩测量个数已经非常接近于最优压缩测量个数,只是增加了一个对数因子 $\log^2 K \log N$ 项. 在未来研究中,我们将发展新型的 RIP

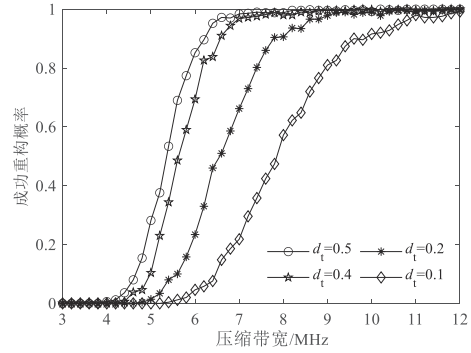
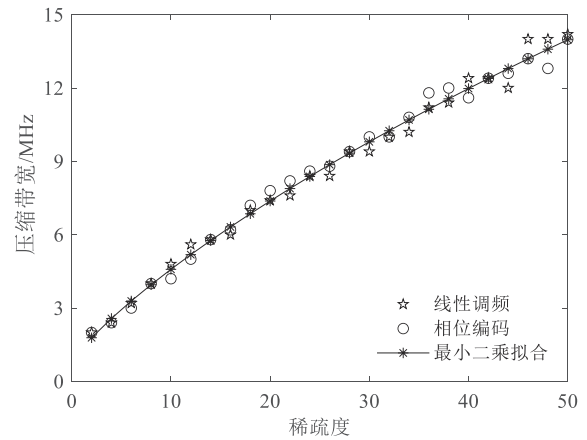
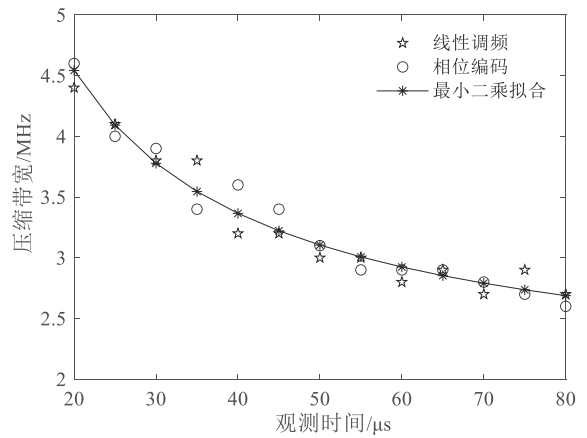


图5 不同占空比情况下,PSR 随压缩带宽变化的性能曲线($K=20$)



(a) 稀疏度($T=20 \mu s$)



(b) 观测时间($K=10$)

图6 压缩带宽与稀疏度和观测时间之间的经验关系

分析技术以消除该对数因子.

6.2 噪声环境下重构性能

QuadCS 系统的等效测量过程如式(38)所示. 对于包含多个目标的雷达回波,难以采用式(36)和式(49)直接描述单个目标定义的输入信噪比和输出信噪比.

为此,本小节基于多目标雷达回波信号,定义输入信噪比(SNR_{IN})和输出信噪比(SNR_{OUT})分别为

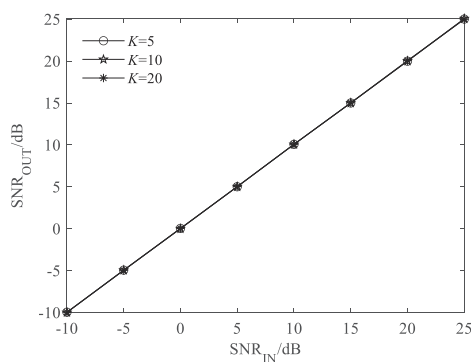
$$\text{SNR}_{\text{IN}} = \|\tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 / \mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}\|_2^2\} \quad (61)$$

$$\text{SNR}_{\text{OUT}} = \|\Phi\tilde{\mathbf{r}}\|_2^2 / \mathbb{E}\{\|\tilde{\mathbf{w}}_{\text{cs}}\|_2^2\} \quad (62)$$

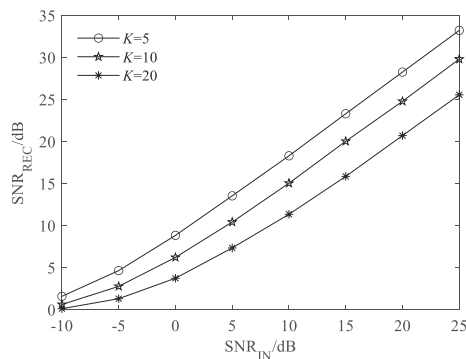
当仅存在单个目标时,式(61)和式(62)的结果分别与式(36)和式(49)一致. 在仿真中,设置 $\varepsilon = \sqrt{NN_w B}$.

图7给出了不同稀疏度 K 情况下, SNR_{IN} 与 SNR_{OUT} 和 SNR_{REC} 之间的关系. 由图7(a)可知,QuadCS的 SNR_{OUT} 始终与 SNR_{IN} 保持一致. 这说明尽管QuadCS的采样速率远小于奈奎斯特速率,但是,正如第5节所分析的,带通信号经过该系统采样后并没有产生SNR损失. 图7(b)表明 SNR_{REC} 始终高于 SNR_{IN} ,即信号经过重构后SNR得到提高,但SNR提高的程度受到稀疏度 K 的影响.

图8(a)给出了不同 SNR_{IN} 情况下, SNR_{REC} 与稀疏度 K 之间的关系. 显然,稀疏度 K 越高,相应的 SNR_{REC} 越小. 图8(b)给出了 SNR_{REC} 与压缩带宽 B_{cs} 之间的关系. 可以看出,压缩带宽 B_{cs} 每减少一半, SNR_{REC} 下降3 dB,这与式(57)中噪声折叠效应引起的信噪比损失结果一致.

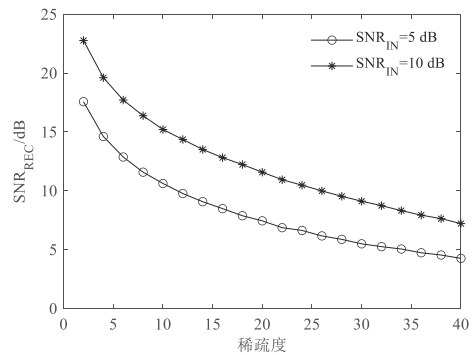


(a) 输出信噪比

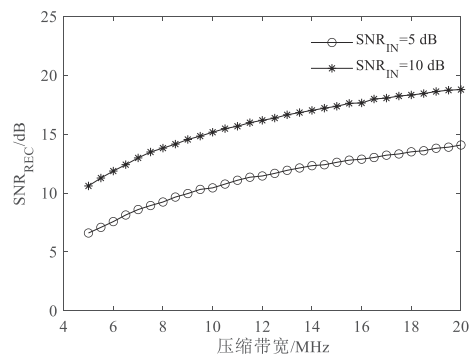


(b) 重构信噪比

图7 不同稀疏度下, SNR_{IN} 和 SNR_{OUT} 与 SNR_{REC} 的关系



(a) 稀疏度



(b) 压缩带宽

图8 不同 SNR_{IN} 下, SNR_{REC} 和稀疏度与压缩带宽的关系

7 结论

QuadCS是一种可直接低速获取射频信号的同相和正交支路信号的模信转换系统. 本文根据其实现结构,首先给出了QuadCS系统感知矩阵的时域描述形式和单元矩阵分解形式. 然后,基于感知矩阵的分解形式,采用单位范数紧框架理论分析了QuadCS系统的RIP条件,理论上保证了QuadCS的可重构性能. 与文献[6]中基于频域描述的RIP条件相比,本文的理论分析方法更加简洁,最小压缩测量个数的理论边界更接近于实际系统所需的压缩测量个数;其次,本文在时域描述形式下分析了QuadCS系统输入信噪比和输出信噪比的一致性特征,以及重构信噪比与压缩带宽之间的关系,为实际系统设计提供了理论依据;最后,数值实验结果有效验证了上述理论分析内容.

本文从时域分析角度进一步完善了QuadCS理论体系,为其在雷达中的应用夯实了理论基础.

参考文献

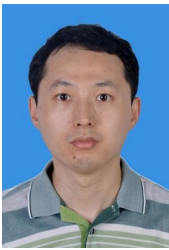
- [1] KIROLOS S, LASKA J, WAKIN M, et al. Analog-to-information conversion via random demodulation[C]//2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software. Piscataway: IEEE, 2006: 71-74.

- [2] LASKA J, KIROLOS S, MASSOUD Y, et al. Random sampling for analog-to-information conversion of wide-band signals[C]//2006 IEEE Dallas/CAS Workshop on Design, Applications, Integration and Software. Piscataway: IEEE, 2006: 119-122.
- [3] TROPP J A, LASKA J N, DUARTE M F, et al. Beyond Nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010, 56(1): 520-544.
- [4] MISHALI M, ELDAR Y C. From theory to practice: Sub-Nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2010, 4(2): 375-391.
- [5] MISHALI M, ELDAR Y C, ELRON A J. Xampling: signal acquisition and processing in union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2011, 59(10): 4719-4734.
- [6] XI F, CHEN S Y, LIU Z. Quadrature compressive sampling for radar signals[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2014, 62(11): 2787-2802.
- [7] XI F, CHEN S Y, LIU Z. Quadrature compressive sampling for radar signals: Output noise and robust reconstruction[C]//2014 IEEE China Summit & International Conference on Signal and Information Processing (ChinaSIP). Piscataway: IEEE, 2014: 790-794.
- [8] ZHANG S L, XI F, CHEN S Y, et al. Segment-sliding reconstruction of pulsed radar echoes with sub-Nyquist sampling[J]. *Science China Information Sciences*, 2016, 59(12): 1-18.
- [9] 张素玲, 席峰, 陈胜垚, 等. 基于正交压缩采样系统的脉冲雷达回波信号实时重构方法[J]. *电子与信息学报*, 2016, 38(5): 1064-1071.
ZHANG S L, XI F, CHEN S Y, et al. A real-time reconstruction scheme of pulsed radar echoes with quadrature compressive sampling[J]. *Journal of Electronics & Information Technology*, 2016, 38(5): 1064-1071. (in Chinese)
- [10] 张素玲, 陈胜垚, 席峰, 等. 亚奈奎斯特采样雷达的运动目标回波信号的快速重构[J]. *电子学报*, 2019, 47(10): 2098-2107.
ZHANG S L, CHEN S Y, XI F, et al. Fast reconstruction of moving target echoes based on sub-Nyquist radar[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2019, 47(10): 2098-2107. (in Chinese)
- [11] LIU C, XI F, CHEN S Y, et al. Pulse-Doppler signal processing with quadrature compressive sampling[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2015, 51(2): 1217-1230.
- [12] CHEN S Y, CHENG Z Y, LIU C, et al. A blind stopping condition for orthogonal matching pursuit with applications to compressive sensing radar[J]. *Signal Processing*, 2019, 165: 331-342.
- [13] CHEN S Y, CHENG Z Y, YANG H Z, et al. Sub-Nyquist sampling with independent measurements[J]. *Signal Processing*, 2020, 170: 107435.
- [14] 陈胜垚, 席峰, 刘中. 正交压缩采样雷达偏离网格目标时延估计技术[J]. *电子学报*, 2015, 43(12): 2352-2359.
CHEN S Y, XI F, LIU Z. Time-delay estimation of off-grid targets for quadrature compressive sampling radar[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2015, 43(12): 2352-2359. (in Chinese)
- [15] XI F, CHEN S Y, ZHANG Y D, et al. Gridless quadrature compressive sampling with interpolated array technique[J]. *Signal Processing*, 2017, 133: 1-12.
- [16] CHEN S Y, XI F, LIU Z. A general sequential delay-Doppler estimation scheme for sub-Nyquist pulse-Doppler radar[J]. *Signal Processing*, 2017, 135: 210-217.
- [17] CHEN S Y, XI F, LIU Z. A general and yet efficient scheme for sub-Nyquist radar processing[J]. *Signal Processing*, 2018, 142: 206-211.
- [18] YANG H Z, CHEN S Y, XI F, et al. Quadrature compressive sampling SAR imaging[C]//2018 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Piscataway: IEEE, 2018: 5847-5850.
- [19] YANG H Z, CHEN C Z, CHEN S Y, et al. Sub-Nyquist SAR via quadrature compressive sampling with independent measurements[J]. *Remote Sensing*, 2019, 11(4): 472.
- [20] CHEN S Y, XI F. Quadrature compressive sampling for multiband radar echo signals[J]. *IEEE Access*, 2017, 5: 19742-19760.
- [21] LEDOUX M. *The Concentration of Measure Phenomenon* [M]. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2001
- [22] ZHANG P, GAN L, SUN S M, et al. Modulated unit-norm tight frames for compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2015, 63(15): 3974-3985.
- [23] HO K C, CHAN Y T, INKOL R. A digital quadrature demodulation system[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(4): 1218-1227.
- [24] CANDÈS E J, TAO T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, 51

(12): 4203-4215.

- [25] FORNASIER M. Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery[M]. Berlin: Walter de Gruyter GmbH, 2010.
- [26] TROPP J A, DHILLON I S, HEATH R W, et al. Designing structured tight frames via an alternating projection method[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(1): 188-209.
- [27] DAVEBPORT M. Random Observations on Random Observations: Sparse Signal Acquisition and Processing[D]. Houston: Rice University, 2010.
- [28] RICHARDS M A. Fundamentals of Radar Signal Processing[M]. New York: McGraw-Hill, 2005.
- [29] VAN DEN BERG E, FRIEDLANDER M P. Probing the Pareto frontier for basis pursuit solutions[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2009, 31(2): 890-912.

作者简介



陈胜焱 男,1985年生,安徽庐江人,博士,南京理工大学副教授、硕士生导师。主要研究方向为雷达信号处理、阵列信号处理、压缩感知、非线性优化在信号处理中的应用等。

E-mail: chenshengyao@njust.edu.cn



席峰 男,1980年生,江苏宜兴人,博士。南京理工大学副教授、硕士生导师。主要研究方向为雷达信号处理、统计和阵列信号处理、压缩感知、凸优化等。

E-mail: xifeng@njust.edu.cn



张素玲 女,1985年生,河南博爱人,博士。南京晓庄学院讲师。研究方向为雷达信号处理、压缩感知。

E-mail: zsljust@163.com



刘中 男,1963年生,安徽灵璧人,博士,南京理工大学教授、博士生导师。主要研究方向为信号采样与处理、雷达信号处理、深度学习等。中国电子学会会员编号: E190011293S。

E-mail: eeqliu@njust.edu.cn